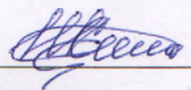


Департамент агропромышленного комплекса, торговли и продовольствия ЯНАО  
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение среднего  
профессионального образования Ямало – Ненецкого автономного округа «Ямальский  
полярный агроэкономический техникум»

Утверждаю

Зам. директора по УР

ГБПОУ ЯНАО «ЯПАТ»

 Халимова И.В.

« 9 » 02 2017 г.

### МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

занятия по дисциплине «Математика»


по теме «Применение производной при решении прикладных задач и задач в  
области профессиональной деятельности»

Специальность: 38.02.01 «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Автор – составитель: Диулина В.П.

Салехард, 2017 г.

Согласовано:


Методист  Еросланова Р.И.

Рассмотрено и утверждено

на заседании ПЦК математических и  
естественнонаучных дисциплин  
протокол № 3 от «7» 08 2017 г.

Председатель

ПЦК

 Еросланова Р.И.

Учебное занятие по математике по теме «Применение производной при решении прикладных задач и задач в области профессиональной деятельности» позволяют сформировать навыки и умения, необходимые для дальнейшего изучения экономических дисциплин. Методическая разработка способствует повышению уровня фундаментальной математической подготовки с усилением ее прикладной экономической направленности. Адресовано методистам, преподавателям и студентам.

Автор – составитель: Диулина В.П., преподаватель математики

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ .....	6
План учебного занятия .....	6
Технологическая карта занятия .....	9
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	16
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	18
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	19
Приложение 1 .....	19

## ВВЕДЕНИЕ

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Использование математических методов формирует так называемый математический стиль мышления, т.е. абстрактный, логический, идеально строгий и – самое главное – нацеленный на поиск закономерностей. Профессионал, грамотно и аккуратно применяющий математические методы, способен принести пользу в любой сфере деятельности, в том числе и экономике.

Математика является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной со сложившимся устойчивым содержанием и общими требованиями к подготовке обучающихся.

Профильная составляющая отражается в требованиях к подготовке обучающихся в части:

- общей системы знаний: содержательные примеры использования математических идей и методов в профессиональной деятельности;
- умений: различие в уровне требований к сложности применяемых алгоритмов;
- практического использования приобретенных знаний и умений: индивидуального учебного опыта в построении математических моделей, используемых в экономических расчетах.

В данной методической разработке показано практическое применение производной на примере решения задач в области физики, химии и экономики. Материал данного занятия способствует развитию логического мышления, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности экономиста, для продолжения образования и самообразования. Овладение математическими знаниями и умениями, применяемыми при решении задач по экономической теории, способствует успешному усвоению дисциплин профессионального цикла и становлению будущего специалиста. Данное занятие направлено на воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры.

Дидактическая цель данного занятия – формирование у студентов умений применять математические методы в освоении естественно-научных дисциплин, а также практических умений, необходимых при изучении дисциплин профессионального цикла.

В методическую разработку входят:

- пояснительная записка;
- педагогическая структура учебного занятия;
- методическая структура учебного занятия;
- приложения.

Структура учебного занятия:

- организация начала занятия;
- основная часть: актуализация опорных знаний обучающихся, мотивация учебной деятельности, изучение нового материала (применение производной при решении физически, химических и экономических задач), контроль усвоенных знаний и усвоенных умений, подведение итогов занятия;
- информация о домашнем задании;
- рефлексия.

Для реализации целей обучения использовались объяснительно-иллюстративные технологии, проблемное обучение.

В результате проведения данного занятия у обучающихся формируются не только умения вычисления производной, но и профессионально важные умения по применению производной и практический опыт применения математических знаний в будущей профессиональной деятельности.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

### План учебного занятия

**Тема урока: «Применение производной при решении прикладных задач и задач в области профессиональной деятельности»**

**Цели:**

*образовательная:*

- рассмотреть примеры применения производной при решении задач прикладных задач естественно-научного цикла;
- продолжить формирование навыков вычисления производной;
- ввести понятие предельных величин;
- формировать навыки вычисления предельных величин;

*развивающая:*

- развивать логическое и экономическое мышление, культуру математических записей;
- развивать навыки вычисления производной в нестандартных ситуациях;

*воспитательная:*

- способствовать формированию таких личностных качеств как внимательность, наблюдательность, самостоятельность;
- повышать культуру математической речи.

**Методическая цель:** применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности.

**Задачи:**

1. Организовать деятельность студентов по закреплению знаний, умений и навыков по теме «Производная» необходимыми для изучения

смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла.

2. Вызвать интерес к занятию, придать ему профессиональную направленность, что способствует получению опыта использования математики в профессионально значимых ситуациях.

3. Развивать критичность мышления на уровне, необходимом для будущей

профессиональной деятельности, потребность в творческой деятельности

В результате изучения обучающийся должен

**знать:**

- понятие производной;
- формулы дифференцирования;
- методы вычисления производной сложной функции

**уметь:**

- находить производные;
- применять производную при решении физических и химических задач;
- применять производную при решении экономических задач

**Иметь практический опыт:**

- вычисления производных;
- применения производных при решении прикладных задач и задач профессиональной направленности

**Формируемые общие компетенции:**

ОК 1 Понимать сущность и социальную значимость будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2 Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 4 Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5 Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

**Формирование универсальных учебных действий:**

*Личностные УДД:* формирование мотивации для обучения.

*Межпредметные УДД:* применение производной при решении физических, химических, экономических задач.

*Предметные УДД:* правила дифференцирования, вычисление производных.

**Тип урока:** урок совершенствования знаний, умений и навыков.

*Вид занятия:* смешанный

**Форма обучения:** групповая, индивидуальная, фронтальная

**Методы обучения:** частично поисковый, эвристическая беседа, словесный, самостоятельная работа с книгой, практический, наглядный.

**Внутрипредметные связи:** производная, правила дифференцирования.

**Межпредметные связи:** физика, химия, экономическая теория.

**Средства обучения:**

1. компьютер;
2. мультимедийный проектор;
3. интерактивная доска;
4. экран;
5. презентация «Применение производной»
6. раздаточный материал.

**Место проведения:** кабинет математики



### Технологическая карта занятия

№ п/п	Этапы урока	Деятельность преподавателя	Деятельность студентов	Формы работы	Универсальные учебные действия	Форма контроля	Метод обучения
1	Организационный момент(1-2 мин.)	Приветствует студентов Создает благоприятный психологический настрой на работу. Отмечает отсутствующих на занятии студентов. Задачи: 1. мотивировать студентов на работу 2. проверить готовность группы к работе; 3. сосредоточить внимание группы; 4.помочь быстро включиться в деловой ритм работы	Приветствуют преподавателя. Студенты включаются в деловой ритм урока	Групповая	Учебное сотрудничество с преподавателем и сверстниками Организация учебной деятельности Самоопределение	Устный опрос	Словесный, беседа
2	Проверка домашнего задания (5 мин.)	Предлагает на доске выполнить задание, которое вызвало затруднение. Если желающих нет, то выполняет сам. Задачи: корректировка пробелов предыдущей темы	Разбирают задания домашней работы, вызвавшие затруднения по желанию	Фронтальная	Структурирование своих знаний контрольной оценки процесса и результатов деятельности Оценка своих результатов	Самоконтроль	Объяснительно-иллюстративный
3	Актуализация опорных знаний и умений учащихся (10 мин.)	На данном этапе задаются вопросы, которые побуждают студентов к познавательному действию. Вопросы; 1. Что называется производной?	Отвечают на вопросы преподавателя  Вычисляют производные	Фронтальная. индивидуальная	Умение четко и полно и полно формулировать определения математических понятий	Устный опрос	Опрос. Частично-поисковый

		<p>2. Как обозначается производная? Для подведения к изучению новой темы целесообразно повторить вычисление производных. Таблица проектируется на экран</p> <p>3. Вычислить производные (устно)</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td><math>y = e^x</math></td> <td><math>y = \sqrt{x}</math></td> <td><math>y = 3 \cos x</math></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td><math>y = 2^x</math></td> <td><math>y = \ln x</math></td> <td><math>y = \cos 3x</math></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td><math>y = \sin x</math></td> <td><math>y = x^n</math></td> <td><math>y = \sin 5x</math></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td><math>y = \cos x</math></td> <td><math>y = x</math></td> <td><math>y = e^{2x}</math></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td><math>y = 7^{2x-1}</math></td> <td><math>y = \operatorname{tg} x</math></td> <td><math>y = \operatorname{ctg} x</math></td> </tr> <tr> <td>6</td> <td><math>y = 4x^7 + 8x^5 + 34x^3 + 2x^2</math></td> <td></td> <td><math>y = x^3 - 8x</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>4. Каков физический смысл производной? Задачи: корректировка знаний по теме: «Производная»</p>		1	2	3	1	$y = e^x$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3 \cos x$	2	$y = 2^x$	$y = \ln x$	$y = \cos 3x$	3	$y = \sin x$	$y = x^n$	$y = \sin 5x$	4	$y = \cos x$	$y = x$	$y = e^{2x}$	5	$y = 7^{2x-1}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$	6	$y = 4x^7 + 8x^5 + 34x^3 + 2x^2$		$y = x^3 - 8x$	<p>простейших функций, корректируют ошибки.</p>		<p>Отличают верно взятые производные от неверных, корректируют ответы студентов Структурирование своих знаний. Оценка своих результатов</p>		
	1	2	3																																
1	$y = e^x$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3 \cos x$																																
2	$y = 2^x$	$y = \ln x$	$y = \cos 3x$																																
3	$y = \sin x$	$y = x^n$	$y = \sin 5x$																																
4	$y = \cos x$	$y = x$	$y = e^{2x}$																																
5	$y = 7^{2x-1}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$																																
6	$y = 4x^7 + 8x^5 + 34x^3 + 2x^2$		$y = x^3 - 8x$																																
4	<p>Мотивация учебной деятельности Формулирование темы урока, постановка</p>	<p>Организует обсуждение</p> <p>1. Где применяется производная? Что знаете со школьного курса? 2. Где еще можно использовать производную? С помощью производной решаются</p>	<p>Отвечают на вопросы преподавателя, участвуют в обсуждении,</p>	<p>Фронтальная</p>	<p>Учебное сотрудничество с преподавателем Умение выражать свои мысли с достаточной полнотой</p>	<p>Устный опрос</p>	<p>Частично - поисковый</p>																												

	целей и задач (5мин.)	физические, химические задачи 2. Как Вы считаете, можно ли применяется ли производная в экономике и где именно? Побуждает студентов сформулировать тему занятия Какова же тема занятия?					
		Сообщает тему занятия и совместно со студентами определяют цели занятия (Проекция на экран темы и целей занятия) Тема: « Применение производной» Цель: <ul style="list-style-type: none"> <li>рассмотреть примеры применения производной при решении задач прикладных задач естественно-научного цикла;</li> <li>продолжить формирование навыков вычисления производной;</li> <li>познакомиться с понятием предельных величин;</li> <li>сформировать навыки вычисления предельных величин.</li> </ul> Задачи: Формировать умение формулировать тему, определять цели занятия	совместно с преподавателем участвуют в определении целей занятия Записывают тему занятия	Фронтальная	Формирование познавательной инициативы, интереса к новой теме	Устный опрос	Беседа, частично - поисковый
5	Формирование новых понятий						

	и способов действий						
1)	Решение физических и химических задач с применением производной	<p>Организует фронтальный и индивидуальный опрос, комментирует ответы, координирует выполнение самостоятельной работы обучающимися</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Каков физический смысл производной?</li> <li>2. При вычислении, каких физических величин используются производные?</li> </ol> <p>Рассмотрим решение следующих задач.</p> <p>Предлагает по желанию у доски решить задачу</p> <p>Слайд <i>Задача № 1.</i></p> <p><i>Задача № 1.</i> В результате значительной потере крови содержание железа в крови уменьшилось на 210 мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени <math>t</math> уменьшается по закону <math>y = 210e^{-\frac{t}{7}}</math> мг. (<math>t</math>- сутки). Найти зависимость скорости восстановления</p>	<p>Отвечают на вопросы преподавателя</p> <p>В тетрадях записывают условие и решение задачи, сверяются с доской</p> <p>Решение задачи у доски</p>	Фронтальная, индивидуальная	Продолжить формировать навыки вычисления производной сложной функции и нахождения производной функции в точке, решения прикладных задач с помощью производной, умения выражать свои мысли.	Выборочная проверка, решения задачи	Словесный. Практический (выполнение практических действий)

		<p>железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент <math>t = 0</math> и через 7 суток.</p> <p>Задачи: формирование навыков по решению прикладных задач</p>					
		<p>Координирует самостоятельную работу обучающего характера. Организует проверку через показ слайда. Ведет консультацию, поощряет работу.</p> <p><i>Задача № 2.</i> Зависимость между массой вещества <math>M</math> (г), полученной в некоторой химической реакции, и временем <math>t</math> (с) выражается уравнением: <math>M=5t^2 + 6t</math>. Найти скорость реакции.</p> <p><i>Задача № 3.</i> Определите скорость (см/с) движения кисти руки через 1,1 с после начала движения, если уравнение движения кисти имеет вид <math>x = 10t^2 + 3</math> (см).</p>	<p>Самостоятельно решают задачи</p> <p>Проводят взаимоконтроль.</p> <p>Сверяют решение задач с решением, проектируемым на слайде</p>	Индивидуальная, групповая	<p>Самоконтроль: Учатся отличать верно выполненное задание от неверного, Осознание того, что уже освоено что еще нужно усвоить, осознание качества и уровня усвоения</p>	Самоконтроль, взаимоконтроль.	Самостоятельная работа обучающего характера
3)	Первичное восприятие и усвоение нового	Организует фронтальную беседу, формирует новые теоретические знания, необходимые для решения практических задач экономического	Работа с раздаточным материалом.	Фронтальная	Формирование знаний о предельном анализе	Проверка выполнения записей в	Объяснительно-иллюстративный,

	<p>материала:</p> <p>Предельный анализ экономических процессов</p>	<p>характера</p> <p>С какими экономическими категориями вы уже встречались в ходе изучения бухгалтерского учета, экономической теории?</p> <p>2. Для расчета экономических показателей используется производная?</p> <p>Дает определения: предельного анализа, предельных величин, издержек производства (предельных и средних), производительности труда, показывает слайд с записанными формулами для их расчета.</p> <p>Задачи: формирование новых теоретических знаний, необходимых для решения задач</p>	<p>Записывают в тетрадь новые экономические термины, формулы для их расчета</p>		<p>экономических процессов, производительности труда</p>	<p>тетради</p>	<p>частично - поисковый</p>
4)	<p>Применение полученных знаний на практике</p> <p>Решение задач</p>	<p>Задачи № 4, № 5</p> <p>Организует работу</p>	<p>Разбор решения задач</p>	<p>Фронтальная</p>	<p>Инициативное сотрудничество, планирование работы,</p>	<p>Проверка выполнения записей в тетради</p>	<p>Объяснительно-иллюстративный, частично-</p>

	на применение производной в предельном анализе экономических процессов, расчете производительности труда	Задачи № 6, № 7 Ведет консультацию  Задачи: формирование навыков по решению экономических задач	Самостоятельно решают задачи, отчитываются о выполнении работы	Индивидуальная	прогнозирование  Выявление самостоятельности в выполнении работ	Проверка выполнения заданий	поисковый  Практический
6	Итоги урока  Объяснение домашнего задания	Выставляет и комментирует оценки  Подводит итоги урока  Предлагает студентам записать домашнее задание, проводит инструктаж по выполнению домашнего задания	Отвечают на вопросы, записывают домашнее задание, слушают инструктаж по его выполнению	Фронтальная	Учебное сотрудничество преподавателя со студентами		Словесный
7	Рефлексия	Отвечают на вопросы: 1. Что узнали нового? 2. Какие трудности встретились в работе? 3. Как их преодолевать? 4. Понравился урок или нет?	Отвечают на вопросы	Фронтальная, индивидуальная, фронтальная	Учебное сотрудничество преподавателя со студентами	Выявление отношения студентов к уроку, заинтересованностью темой	Словесный

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При подготовке и проведении занятия по теме «Применение производной при решении прикладных задач и задач в области профессиональной деятельности» по дисциплине «Математика» ставились следующие цели:

*образовательная:*

рассмотреть примеры применения производной при решении задач прикладных задач естественно-научного цикла; продолжить формирование навыков вычисления производной; ввести понятие предельных величин; формировать навыки вычисления предельных величин;

*развивающая:*

развивать логическое и экономическое мышление, культуру математических записей; развивать навыки вычисления производной в нестандартных ситуациях;

*воспитательная:*

способствовать формированию таких личностных качеств как внимательность, наблюдательность, самостоятельность; повышать культуру математической речи.

Для проведения занятия были подготовлены:

Раздаточный материал:

- условия задач (Приложение 2);
- теоретический материал по теме: «Предельный анализ экономических процессов» (Приложение 2).

Техническое оснащение урока: Компьютер, проектор для демонстрации презентации, экран.

Компьютерная презентация в Microsoft Power Point.

Обычно студенты на занятии спрашивают о том, где же можно применить их знания по данной теме. Данное занятие наглядно показывает практическое применение производной для выполнения экономических



расчетов. Студенты заинтересованы в выполнении заданий, правильно рассчитывают экономические показатели, о чем свидетельствует самостоятельная работа по решению задач на вычисление издержек производства и производительности труда.

Занятие достигло цели, поставленные задачи были выполнены. Студенты приобрели практический опыт выполнения экономических расчетов и анализа полученных экономических результатов. Работа на занятии проходит в сотрудничестве преподавателя и студентов. Студенты высказывают свое мнение, делают выводы. Урок был интересным и насыщенным, студенты были активны и работоспособны.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике [Текст]: учеб. пособие для средних спец. учебн. заведений/ Н.В. Богомолов. – М.Высшая школа, 2014. – 100 с.

2. Высшая математика для экономистов [Текст]: Практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Н.Ш. Кремер и др.] под редакцией проф. Н.Ш. Кремера. – М.; ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – с. 194.

3. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст]: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман под ред. Н.Ш. Кремера. – М.; Издательство Юрайт ИД Юрайт , 2012. – 198 с.

4. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики [Текст]: учебник для студентов среднего проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А Дубинский. – 10-е изд. – М. 2014. - 118 с.

5. Омельченко, В.П. Математика [Текст]: учеб. пособие / В.П. Омельченко, Э.В. Курбатова.- Ростов-н/Д: Феникс, 2011, - 101 с.

6. Омельченко В.П., Курбатова Э.В. Практические занятия по высшей математике [Текст]: учеб. пособие /В.П.Омельченко, Э.В. Курбатова./ Ростов-н/Д: Феникс, 2011,- 10 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Ход занятия

I. Организационный момент (2 мин.). Приветствие студентов

II. Актуализация опорных знаний студентов. (5 мин.)

1. Что называется производной?
2. Как обозначается производная?
3. Вычислить производные:

	1	2	3	4
1	$y = e^x$	$y = \sqrt{x}$	$y = 3 \cos x$	$y = x^3 + 2x^2 - 7x + 8$
2	$y = 2^x$	$y = \ln x$	$y = \cos 3x$	$y = 7^{2x-1}$
3	$y = \sin x$	$y = x^n$	$y = \sin 5x$	$y = \operatorname{tg} x$
4	$y = \cos x$	$y = x$	$y = e^{2x}$	$y = \operatorname{ctg} x$

4. Каков физический смысл производной?

III. Мотивация учебной деятельности (5 мин.)

Где же можно использовать ваши знания производной?

Сегодня на уроке мы с вами познакомимся, где же находит практическое применение производная. С помощью производной решаются многие физические задачи, задачи на расчет концентрации вещества, определение скорости реакции в химии, а также экономические задачи.

IV. Формирование новых понятий и способов действия (70 мин.)

#### Решение физических и химических задач

3. Каков физический смысл производной?
4. При вычислении, каких физических величин используются производные?

Рассмотрим решение следующих задач.

**Задача № 1.** В результате значительной потере крови содержание железа в крови уменьшилось на 210 мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени  $t$  уменьшается по закону

$y = 210e^{-\frac{t}{7}}$  мг. ( $t$ - сутки). Найти зависимость скорости восстановления железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент  $t = 0$  и через 7 суток.

*Решение*

Дано:

$$y = 210e^{-\frac{t}{7}} \text{ мг}$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 7 \text{ с}$$

Найти

$$y'(7)$$

*Решение*

$$y' = \left( 210e^{-\frac{t}{7}} \right)' = 210e^{-\frac{t}{7}} \cdot \left( -\frac{t}{7} \right)' = -\frac{1}{7} \cdot 210e^{-\frac{t}{7}} = -30e^{-\frac{t}{7}}$$

$$y'(0) = -30e^0 = -30 \text{ (мг/сут.)}$$

$$y'(7) = -30e^{-\frac{7}{7}} = -30e^{-1} = -30 \cdot \frac{1}{e} \approx -\frac{30}{2,7} \approx -11,1 \text{ (мг/сут.)}$$

*Ответ:* Недостаток железа в момент потери крови составил 30 мг/сут., через 7 дней - 11,1 мг/сут.

Самостоятельно решить задачи №2, №3 (решение проверить)

**Задача № 2.** Зависимость между массой вещества  $M$  (г), полученной в некоторой химической реакции, и временем  $t$  (с) выражается уравнением:  $M = 5t^2 + 6t$ . Найти скорость реакции.

Дано:

$$M = 5t^2 + 6t$$

Найти  $M'$

*Решение*

$$M'(t) = (5t^2 + 6t) = 10t + 6$$

*Ответ:*  $10t+6$  (г/с)

**Задача № 3.** Определите скорость (см/с) движения кисти руки через 1,1 с после начала движения, если уравнение движения кисти имеет вид  $x = 10t^2 + 3$  (см).

*Дано:*

$$x = 10t^2 + 3 \text{ (см)}$$

$$t = 1,1 \text{ с}$$

*Найти:*  $x'$

*Решение*

$$x' = (10t^2 + 3)' = 20t$$

$$x'(1,1) = 20 \cdot 1,1 = 22 \text{ (см/с)}$$

*Ответ:* 22 см/с.

V. Решение экономических задач

### **Предельный анализ экономических процессов**

1. С какими экономическими категориями вы уже встречались в ходе изучения бухгалтерского учета, экономического анализа?

Для расчета экономических показателей используется производная

**1. Предельные величины.** Применение производной в экономике позволяет получить так называемые *предельные характеристики* экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризует не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса во времени или относительно другого исследуемого фактора.

**2. Издержки производства.**

Если издержки производства  $y$  рассматривать как функцию выпускаемой продукции  $x$ , т.е.  $y = C(x)$ , то  $y' = C'(x)$  будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. *Средние издержки* являются издержками на единицу выпуска продукции:  $y_1 = \frac{C(x)}{x}$ .

**2. Производительность труда.** Пусть функция  $u(x)$  выражает объем произведенной продукции  $y$  за время  $t$ . Тогда производная объема произведенной продукции  $y$  по времени  $u'(t_0)$  есть *производительность труда* в момент  $t_0$ . Скорость изменения производительности является производной производительности труда  $z'(t)$ .

Темп изменения производной равен логарифмической производной  $T_n = [\ln z(z)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}$ .

### Решение экономических задач

**Задача №4.** Функция издержек производства продукции некоторой фирмы имеет вид:  $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$  (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при  $x = 10$ .

*Решение.*

Найдем производную  $y'(x)$  и ее значение  $y'(10)$  - предельные издержки производства

$$y'(x) = (0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250)' = 0,3x^2 - 2,4x + 5;$$

$$y'(10) = 0,3 \cdot 10^2 - 1,2 \cdot 10 + 5 = 30 - 24 + 5 = 11.$$

Средние издержки производства на единицу продукции:

$$y_1(x) = \frac{y(x)}{x},$$

$$y_1(x) = \frac{0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250}{x} = 0,1x^2 - 1,2x + 5 + \frac{250}{x};$$

$$y_1(10) = 0,1 \cdot 10^2 - 1,2 \cdot 10 + 5 + \frac{250}{10} = 10 - 12 + 5 + 25 = 28.$$

*Ответ:* при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции

составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приблизительно в 11 ден. ед.

Самостоятельное решение задачи №5 с последующей проверкой решения проекцией на экран с помощью мультимедиопроектора

**Задача №5.** Объем производства зимней обуви  $u$ , выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением  $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$  (ед.), где  $t$  – календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения: а) в начале года ( $t = 0$ ); б) в середине года ( $t = 6$ ); в) в конце года ( $t = 12$ ).

**Решение.**

Производительность труда выражается производной  $z(t) = u'(t)$ .

$$z(t) = \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100 \right)' = t^2 - 7t + 6 \text{ (ед./мес.)}.$$

Скорость изменения производительности является производной производительности труда  $z'(t)$ .

$$z'(t) = (t^2 - 7t + 6)' = 2t - 7 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}.$$

Темп изменения производной равен логарифмической производной

$$T_z = [\ln z(z)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

$$T_z(t) = \frac{2t - 7}{t^2 - 7t + 6} \text{ (ед./мес.)}$$

В заданные моменты времени соответственно имеем:

$$a) t = 0, \quad z(0) = 6 \text{ (ед./мес.)},$$

$$z'(0) = -7 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}$$

$$T_z(0) = \frac{-7}{6} = -1,167 \text{ (ед./мес.)};$$

$$б) t = 6, \quad z(6) = 6^2 - 7 \cdot 6 + 6 = 36 - 42 + 6 = 0 \text{ (ед./мес.)},$$

$$z'(6) = 2 \cdot 6 - 7 = 5 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}$$

$$T_z(6) = \frac{5}{0} \text{ не существует.}$$

$$6) t = 12, \quad z(12) = 12^2 - 7 \cdot 12 + 6 = 144 - 84 + 6 = 66 \text{ (ед./мес.),}$$

$$z'(6) = 2 \cdot 12 - 7 = 17 \text{ (ед./мес.}^2\text{)}$$

$$T_z(t) = \frac{66}{17} = 3,882 \text{ (ед./мес.)}$$

Самостоятельное решение задачи №7 с последующей проверкой решения проекцией на экран с помощью мультимедиопроектора.

### Самостоятельная работа

**Задача №6** Зависимость между издержками производства  $y$  и объемом выпускаемой продукции  $x$  на предприятии выражается функцией  $y = 50x - 0,05x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме 10ед.

*Решение.*

Найдем производную  $y'(x)$  и ее значение  $y'(10)$  - предельные издержки производства

$$y' = (50x - 0,05x^3)' = 50 - 0,15x^2$$

$$y'(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 50 - 15 = 35$$

Средние издержки производства на единицу продукции:

$$y_1(x) = \frac{y(x)}{x},$$

$$y_1(x) = \frac{50x - 0,05x^3}{x} = 50 - 0,05x^2;$$

$$y_1(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 50 - 5 = 45$$

*Ответ:* при данном уровне производства (количестве выпускаемой продукции) средние затраты на производство одной единицы продукции составляют 45ден. ед., а увеличение объема на одну единицу продукции обойдется фирме приблизительно в 35ден. ед.



**Задача №7** Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = -2,5t^2 + 15t + 100$ , где  $0 \leq t \leq 8$  - рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t = 2$  и  $t = 7$ .

**Решение**

Производительность труда выражается производной  $z(t) = u'(t)$ .

$$y = -2,5t^2 + 15t + 100$$

$$0 \leq t \leq 8$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = 7$$

$$y' = (-2,5t^2 + 15t + 100)' = -5t + 15$$

$$y'(2) = -5 \cdot 2 + 15 = 5;$$

$$y'(7) = -5 \cdot 7 + 15 = -20$$

Темп изменения производной равен логарифмической производной

$$T_z = [\ln z(z)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

$$T_z = \frac{-5t + 15}{-2,5t^2 + 15t + 100}$$

$$T_z(2) = \frac{-5 \cdot 2 + 15}{-2,5 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 100} = \frac{-10 + 15}{-10 + 30 + 100} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24} \approx 0,042 (\text{ед./мес.})$$

$$T_z(7) = \frac{-5 \cdot 7 + 15}{-2,5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100} = \frac{-35 + 15}{-122,5 + 105 + 100} = \frac{-20}{82,5} = -0,24 (\text{ед./мес.})$$

VI. Подведение итогов урока, комментирование домашнего задания (5 мин.).

**Задача №1** Зависимость между издержками производства сигарет  $y$  и процентным содержанием вредных веществ в них  $x$  выражается функцией  $y = \frac{10000}{x} - 100$ . Определить средние и предельные издержки производства, если количество вредных веществ составляет 10%.

**Задача №2** Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = 0,01x^2 - 0,5x + 12$ , где  $0 \leq t \leq 10$  - рабочее время в часах.

Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t = 1$  и  $t = 6$ .

VII. Рефлексия. (3 мин.) Что нового узнали? Где находит применение производная? На этом наше занятие закончено. Спасибо за внимание.

Приложение 2 (раздаточный материал для студентов)

### Предельный анализ экономических процессов

1. С какими экономическими категориями вы уже встречались в ходе изучения бухгалтерского учета, экономического анализа?

Для расчета экономических показателей используется производная

**1. Предельные величины.** Применение производной в экономике позволяет получить так называемые *предельные характеристики* экономических объектов или процессов. Предельные величины (предельная выручка, полезность, производительность, предельный доход, продукт и др.) характеризует не состояние, а скорость изменения экономического объекта или процесса во времени или относительно другого исследуемого фактора.

#### 2. Издержки производства.

Если издержки производства  $y$  рассматривать как функцию выпускаемой продукции  $x$ , т.е.  $y = C(x)$ , то  $y' = C'(x)$  будет выражать *предельные издержки* производства и приближенно характеризовать прирост переменных затрат на производство дополнительной единицы продукции. *Средние издержки* являются издержками на единицу выпуска продукции:  $y_1 = \frac{C(x)}{x}$ .

**2. Производительность труда.** Пусть функция  $u(x)$  выражает объем произведенной продукции  $y$  за время  $t$ . Тогда производная объема произведенной продукции  $y$  по времени  $u'(t_0)$  есть *производительность труда* в момент  $t_0$ . Скорость изменения производительности является производной производительности труда  $z'(t)$ .

Темп изменения производной равен логарифмической производной  $T_z = [\ln z(z)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}$ .

#### Решение задач

**Задача № 1.** В результате значительной потере крови содержание железа в крови уменьшилось на 210 мг. Недостаток железа вследствие его восстановления с течением времени  $t$  уменьшается по закону

$y = 210e^{-\frac{t}{7}}$  мг. ( $t$ - сутки). Найти зависимость скорости восстановления железа в крови от времени. Вычислить эту скорость в момент  $t = 0$  и через 7 суток.

### Самостоятельная работа

**Задача № 2.** Зависимость между массой вещества  $M$  (г), полученной в некоторой химической реакции, и временем  $t$  (с) выражается уравнением:  $M = 5t^2 + 6t$ . Найти скорость реакции

**Задача № 3.** Определите скорость (см/с) движения кисти руки через 1,1 с после начала движения, если уравнение движения кисти имеет вид  $x = 10t^2 + 3$  (см).

### Решение задач

**Задача №4.** Функция издержек производства продукции некоторой фирмы имеет вид:  $y(x) = 0,1x^3 - 1,2x^2 + 5x + 250$  (ден. ед.). Найти средние и предельные издержки производства и вычислить их значение при  $x = 10$ .

**Задача №5.** Объем производства зимней обуви  $u$ , выпускаемой некоторой фирмой, может быть описан уравнением  $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$  (ед.), где  $t$  – календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения:  $a$ ) в начале года ( $t = 0$ );  $b$ ) в середине года ( $t = 6$ );  $b$ ) в конце года ( $t = 12$ ).

### Самостоятельная работа

**Задача №6** Зависимость между издержками производства  $y$  и объемом выпускаемой продукции  $x$  на предприятии выражается функцией  $y = 50x - 0,05x^3$ . Определить средние и предельные издержки при объеме 10ед.

**Задача №7** Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = -2,5t^2 + 15t + 100$ , где  $0 \leq t \leq 8$  - рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t = 2$  и  $t = 7$ .

### Домашнее задание

**Задача №1** Зависимость между издержками производства сигарет  $y$  и процентным содержанием вредных веществ в них  $x$  выражается функцией  $y = \frac{10000}{x} - 100$ . Определить средние и предельные издержки производства, если количество вредных веществ составляет 10%.

**Задача №2** Производительность труда бригады может быть описана уравнением  $y = 0,01x^2 - 0,5x + 12$ , где  $0 \leq t \leq 10$  - рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при  $t = 1$  и  $t = 6$ .